Corrigé

Problème 3 : Que la force soit avec *f* !

Nous noterons assez souvent : $F(f,k,x,y)=\left(y^k f(y)-x^k f(x)\right)\left(\dfrac{f(y)}{y^k}-\dfrac{f(x)}{x^k}\right)$ pour désigner l'expression qui intervient dans les définitions de force et de faiblesse.

Remarquons que $F(f,k,y,x)=\left(x^k f(x)-y^k f(y)\right)\left(\dfrac{f(x)}{x^k}-\dfrac{f(y)}{y^k}\right)=F(f,k,x,y)$, il s'agit d'une expression symétrique en x et en y. On peut intervertir leurs rôles ou aussi, sans restreindre la généralité, on pourra supposer $x \leq y$.

Partie I : Quelques exemples et propriétés

1. Il s'agit dans cette question d'étudier pour tous réels x et y strictement positifs le signe de l'expression $a_k(x,y)=\left(y^k\times y^2-x^k\times x^2\right)\times\left(\dfrac{y^2}{y^k}-\dfrac{x^2}{x^k}\right)$ lorsque $k=1$ puis lorsque $k=3$.

Dans ce contexte : $a_k(x,y)=\left(y^{k+2}-x^{k+2}\right)\left(y^{2-k}-x^{2-k}\right)$ et en particulier :

$$\begin{cases} a_1(x,y)=\left(y^3-x^3\right)(y-x)=(y-x)^2\left(x^2+xy+y^2\right) \\ a_3(x,y)=\left(y^5-x^5\right)\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)=-(y-x)^2\,\dfrac{x^4+yx^3+x^2y^2+xy^3+y^4}{xy} \end{cases}$$

L'expression $a_1(x,y)$ est positive et l'expression $a_3(x,y)$ est négative quelles que soient les valeurs de x et de y : la fonction carrée est 1-forte et 3-faible.

Questions 2 et 3. Il s'agit dans ces questions d'étudier le signe de l'expression $b(x,y)=\left(y\times \mathbf{e}^y-x\times \mathbf{e}^x\right)\left(\dfrac{\mathbf{e}^y}{y}-\dfrac{\mathbf{e}^x}{x}\right)$ dans certaines circonstances.

La fonction $x\mapsto x\,\mathbf{e}^x$ est une fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (car produit de deux fonctions strictement positives et croissantes). Le facteur $\left(y\times\mathbf{e}^y-x\times\mathbf{e}^x\right)$ est du même signe que $(y-x)$ sur $]0,+\infty[$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x}{x}$ a pour dérivée la fonction : $x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2}(x-1)$, dérivée négative sur $]0,\ 1[$ et positive sur $]1,\ +\infty[$. Elle est strictement décroissante sur $]0,\ 1[$ et strictement croissante sur $]1,\ +\infty[$.

Ainsi, le facteur $\left(\dfrac{\mathbf{e}^y}{y}-\dfrac{\mathbf{e}^x}{x}\right)$ est du signe de $y-x$ si x et y appartiennent à $]1,\ +\infty[$ et du signe de $-(y-x)$ si x et y appartiennent à $]0,\ 1[$.

2. L'expression $b(x,y)=\left(y\times\mathbf{e}^y-x\times\mathbf{e}^x\right)\left(\dfrac{\mathbf{e}^y}{y}-\dfrac{\mathbf{e}^x}{x}\right)$ est du signe de $-(y-x)^2$, donc négative, sur $]0,\ 1[$: la fonction exponentielle est 1-faible sur cet intervalle. L'inégalité contraire n'est pas vérifiée si x et y sont distincts : la fonction exponentielle n'y est pas 1-forte.

3. L'expression $b(x,y)=\left(y\times\mathbf{e}^y-x\times\mathbf{e}^x\right)\left(\dfrac{\mathbf{e}^y}{y}-\dfrac{\mathbf{e}^x}{x}\right)$ est du signe de $(y-x)^2$, donc positive, sur $]1,\ +\infty[$: la fonction exponentielle est 1-forte sur cet intervalle. L'inégalité contraire n'est pas vérifiée si x et y sont distincts : la fonction exponentielle n'y est pas 1-faible.

4. $F(inverse,k,x,y)=\left(y^k\times\dfrac{1}{y}-x^k\times\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{y\times y^k}-\dfrac{1}{x\times x^k}\right)=\left(y^{k-1}-x^{k-1}\right)\left(\dfrac{1}{y^{k+1}}-\dfrac{1}{x^{k+1}}\right)$

Pour tout entier $k\geq 1$, la fonction $x\mapsto x^{k-1}$ est croissante sur $]0,\ +\infty[$ (éventuellement constante lorsque $k=1$ mais cela ne change pas la conclusion) et la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^{k+1}}$ est strictement décroissante sur $]0,\ +\infty[$. L'expression $\left(y^{k-1}-x^{k-1}\right)$ est, au sens large, du signe de $(y-x)$, l'expression $\left(\dfrac{1}{y^{k+1}}-\dfrac{1}{x^{k+1}}\right)$ est, au sens strict, du signe de $-(y-x)$, et leur produit est toujours du signe de $-(y-x)^2$ donc négatif ou nul.

$F(inverse,k,x,y)\leq 0$ quels que soient x et y appartenant à $]0,\ +\infty[$. Donc la fonction inverse est k-faible pour tout entier $k\geq 1$.

5. Il semble bien qu'il n'existe pas de fonction qui soit *k*-forte pour tout entier $k \geq 1$. Considérons en effet le critère de force qui sera démontré en question **6**, à savoir $\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k} \leq \frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}$ pour tous x et y strictement positifs. On choisit le réel $y=1$ et un réel $x>1$.

Alors : $\lim\limits_{k \to +\infty}\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)=+\infty$ de sorte qu'une majoration universelle de cette expression par $\frac{f(x)}{f(1)}+\frac{1}{f(x)}$ semble impossible. Le critère de force de la question **6** ne peut pas être satisfait pour toute valeur de *k*.

Partie II : Quelques critères de force et de faiblesse

6. Si on développe l'expression $F(f,k,x,y)=\left(y^k f(y)-x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k}-\frac{f(x)}{x^k}\right)$, on obtient :

$F(f,k,x,y)=(f(y))^2+(f(x))^2-\frac{x^k}{y^k}f(x)f(y)-\frac{y^k}{x^k}f(x)f(y)$ et si on factorise par $f(x).f(y)$ on obtient :

$$F(f,k,x,y)=f(x)\times f(y)\times\left[\left(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right)-\left(\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\right)\right].$$

Puisque *f* est une fonction à valeurs strictement positives, $F(f,k,x,y)$ est, universellement, du même signe que la différence $\left(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right)-\left(\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\right)$.

La fonction *f* est *k*-forte si et seulement si pour tous *x* et *y* de *I*, $F(f,k,x,y)$ est positive ou nulle, donc si et seulement si $\left(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right)-\left(\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\right) \geq 0$ donc si et seulement si $\left(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right) \geq \left(\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\right)$ pour tous *x* et *y* de *I*.

La fonction *f* est *k*-faible si et seulement si pour tous *x* et *y* de *I*, $F(f,k,x,y)$ est négative ou nulle, donc si et seulement si $\left(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right)-\left(\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\right) \leq 0$ donc si et seulement si $\left(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right) \leq \left(\frac{x^k}{y^k}+\frac{y^k}{x^k}\right)$ pour tous *x* et *y* de *I*.

7. Il apparaît utile de considérer la fonction phi définie sur $]0, +\infty[$ par : $u \mapsto \phi(u) = u + \dfrac{1}{u}$ et d'en étudier quelques propriétés.

- Sa fonction dérivée est la fonction $u \mapsto \phi'(u) = 1 - \dfrac{1}{u^2} = \dfrac{u^2 - 1}{u^2}$, du signe de $(u-1)$, ce qui montre qu'il s'agit d'une fonction strictement décroissante sur $]0, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et qui a pour minimum 2 au point 1.
- Cette fonction vérifie la relation : $\phi(u) = \phi\left(\dfrac{1}{u}\right)$ pour tout u strictement positif.

Les critères de la question précédente s'interprètent à l'aide de la fonction phi :

La fonction f est k-forte si et seulement si $\phi\left(\dfrac{x^k}{y^k}\right) \leq \phi\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right)$ pour tous x et y appartenant à I

La fonction f est k-faible si et seulement si $\phi\left(\dfrac{x^k}{y^k}\right) \geq \phi\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right)$ pour tous x et y appartenant à I.

Dans le contexte de cette question, $\dfrac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)}$ est celui des deux nombres $\dfrac{x^k}{y^k}$ ou $\dfrac{y^k}{x^k}$ qui est plus grand que 1 et de même $\dfrac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$ est celui des deux nombres $\dfrac{f(x)}{f(y)}$ ou $\dfrac{f(y)}{f(x)}$ qui est plus grand que 1.

Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction phi est strictement croissante, ces nombres sont rangés dans le même ordre que leurs images par phi.

- La fonction f est k-forte si et seulement si pour tous réels x et y appartenant à I : $\phi\left(\dfrac{x^k}{y^k}\right) \leq \phi\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right)$

  donc si et seulement si : $\dfrac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)} \leq \dfrac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$

- La fonction f est k-faible si et seulement si pour tous réels x et y appartenant à I : $\phi\left(\dfrac{x^k}{y^k}\right) \geq \phi\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right)$

  donc si et seulement si : $\dfrac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)} \geq \dfrac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$

8. En utilisant les notations propres à cette question :

$F(f,k,x,y)=\left(y^k f(y)-x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k}-\frac{f(x)}{x^k}\right)=\left(g_k(y)-g_k(x)\right)\left(h_k(y)-h_k(x)\right)$. Cette expression est nulle lorsque x et y sont égaux et, s'ils sont distincts, elle est, pour tous x et y d'un intervalle I inclus dans $]0,+\infty[$, du même signe que l'expression : $\frac{F(f,k,x,y)}{(y-x)^2}=\left(\frac{g_k(y)-g_k(x)}{y-x}\right)\left(\frac{h_k(y)-h_k(x)}{y-x}\right)$. Nous y reconnaissons le produit des taux de variation des fonctions g_k et h_k entre x et y.

8.a. Lorsque les fonctions g_k et h_k sont monotones, ces taux de variations gardent un signe constant. Etudions ce qu'il se passe dans les différents cas de monotonie. Il y a *a priori* quatre combinaisons de monotonie, mais nous allons voir que l'une d'entre elles n'est pas opérationnelle.

Supposons que la fonction g_k soit une fonction décroissante sur l'intervalle I.

Pour tous x et y de I tels que $x<y$: $g_k(x)\geq g_k(y)$, soit $x^k f(x)\geq y^k f(y)$

Puisque $x<y$, et que toute fonction puissance entière négative est strictement décroissante, $\frac{1}{x^{2k}}>\frac{1}{y^{2k}}$. En multipliant membre à membre ces deux inégalités de même sens entre nombres strictement positifs, on obtient une inégalité de même sens : $\frac{f(x)}{x^k}>\frac{f(y)}{y^k}$.

La fonction h_k est forcément une fonction strictement décroissante.

Ainsi : « g_k décroissante sur I » implique « h_k décroissante sur I ».

Supposons maintenant que h_k soit une fonction croissante sur l'intervalle I.

Pour tous x et y de I tels que $x<y$: $h_k(x)\leq h_k(y)$, soit $\frac{f(x)}{x^k}\leq\frac{f(y)}{y^k}$.

Puisque $x<y$, et que toute fonction puissance entière strictement positive est strictement croissante, $x^{2k}<y^{2k}$. En multipliant membre à membre ces deux inégalités de même sens entre nombres strictement positifs, on obtient une inégalité de même sens : $x^k f(x)<y^k f(y)$

La fonction g_k est forcément une fonction strictement croissante.

Ainsi : « h_k croissante sur I » implique « g_k croissante sur I ».

Autrement dit, d'un point de vue monotonie, il n'est pas possible que, simultanément, h_k soit croissante et g_k décroissante.

Nous arrivons à ces conclusions, qui montrent que quel que soit le cas de figure f est k-forte ou k-faible :

	g_k croissante	g_k décroissante
h_k croissante	Les deux taux de variations sont positifs, $F(f,k,x,y)$ est toujours positif, f est k-forte	Impossible
h_k décroissante	Le taux de variation de g_k est positif, celui de h_k est négatif. $F(f,k,x,y)$ est toujours négatif, f est k-faible	Les deux taux de variation sont négatifs, $F(f,k,x,y)$ est toujours positif, f est k-forte

8.b. Supposons que g_k ne soit pas monotone. Il existe trois nombres réels x, y, z appartenant à I tels que $x<y<z$ et ou bien $g_k(x)<g_k(y)$; $g_k(z)<g_k(y)$ ou bien $g_k(x)>g_k(y)$; $g_k(z)>g_k(y)$. Dans les deux cas, deux des images sont rangées strictement dans l'ordre contraire de celui de leurs antécédents. Mais alors, les images de ces mêmes réels par h_k ont (strictement) la même propriété. Le produit des taux de variations, pour ces réels, est strictement positif : f ne peut pas être k-faible.

Supposons que h_k ne soit pas monotone. Il existe trois nombres réels x, y, z appartenant à I tels que $x<y<z$ et ou bien $h_k(x)<h_k(y)$; $h_k(z)<h_k(y)$ ou bien $h_k(x)>h_k(y)$; $h_k(z)>h_k(y)$. Dans les deux cas, deux des images sont rangées strictement dans le même ordre que celui de leurs antécédents. Mais dans les deux cas, les images de ces mêmes réels par g_k ont (strictement) la même propriété. Le produit des taux de variations, pour ces réels, est strictement positif : f ne peut pas être k-faible. Donc si au moins une des deux fonctions n'est pas monotone, f n'est pas k-faible. Par contraposition, si f est k-faible, les deux fonctions sont monotones. Plus précisément : la fonction g_k est croissante et la fonction k_k est décroissante, puisque ce cas de figure est le seul possible.

8.c. La fonction g_1 est définie par : $g_1(x) = x\,f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ \ 0 < x < 1 \\ 4 & si \ \ x = 1 \\ x^2 & si \ \ 1 < x < 2 \\ 4x^2 & si \ \ 2 \le x \end{cases}$. Elle est croissante sur $]0,\, 1[$ et sur $]1,\, +\infty[$ séparément, mais elle n'est pas croissante sur I en entier car $g_1(1) > g_1(x)$ lorsque $1 < x < 2$: g_1 n'est pas monotone.

La fonction h_1 est définie par : $h_1(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1 & si \ \ 0 < x < 1 \\ 4 & si \ \ x = 1 \\ 1 & si \ \ 1 < x < 2 \\ 4 & si \ \ 2 \le x \end{cases}$. Elle est constante sur $]0,\, 1[$, sur $]1,\, 2[$ et sur $]2,\, +\infty[$ séparément, mais elle n'est ni croissante ni décroissante sur I en entier car $g_1(1) > g_1(x)$ lorsque $0 < x < 1$ et aussi lorsque $1 < x < 2$: h_1 n'est pas monotone non plus.

Pour savoir si f est 1-forte, étudions le signe de l'expression :

$$F(f,1,x,y) = \left(y\,f(y) - x\,f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y} - \frac{f(x)}{x}\right) = \left(g_1(y) - g_1(x)\right)\left(h_1(y) - h_1(x)\right).$$

Compte tenu de la symétrie de cette expression par rapport à x et à y, on peut supposer que $0 < x < y$.

Vu la définition de h_1, constante par morceaux, $F(f,1,x,y) = 0$ lorsque x et y appartiennent tous deux à un même ensemble $]0,\, 1[\cup]1,\, 2[$ ou à $]2,\, +\infty[$. Il reste à examiner les nombreux autres cas.

- Si $x < y = 1$: $F(f,1,x,1) = \left(4 - x^2\right)(4 - 1) = 3\left(4 - x^2\right) > 0$
- Si $x = 1 < y < 2$: $F(f,1,1,y) = \left(y^2 - 4\right)(1 - 4) = 3\left(4 - y^2\right) > 0$

- Si $x = 1 < 2 \le y$: $F(f,1,1,y) = \left(4y^2 - 4\right)(4 - 4) = 0$
- Si $x < 1 < 2 \le y$ ou si $1 < x < 2 \le y$: $F(f,1,x,y) = \left(4y^2 - x^2\right)(4 - 1) = 3\left(4y^2 - x^2\right) > 0$

Espérons ne pas en avoir oublié ! Le résultat est toujours positif ou nul, f est une fonction 1-forte.

9. Si la fonction f est une fonction dérivable, il en est de même des fonctions g_k et h_k.

- D'une part : $g_k'(x) = x^k\, f'(x) + k\,x^{k-1}\, f(x) = x^k\left(f'(x) + k\,\dfrac{f(x)}{x}\right)$.
- D'autre part : $h_k'(x) = \dfrac{x^k\, f'(x) - k\,x^{k-1} f(x)}{x^{2k}} = \dfrac{1}{x^k}\left(f'(x) - k\,\dfrac{f'(x)}{x}\right)$

9.a. Supposons que pour tout réel x de l'intervalle ouvert I : $|f'(x)| \geq k\dfrac{f(x)}{x}$. La fonction $x \mapsto k\dfrac{f(x)}{x}$ est par hypothèse à valeurs strictement positives sur I. La fonction dérivée étant supposée continue sur I, ou bien $f'(x) \geq k\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout réel de I, ou bien $-f'(x) \geq k\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout réel de I (l'hypothèse de continuité de la dérivée empêche que l'on ait sur un même intervalle tantôt une inégalité, tantôt l'autre).

Dans le premier cas, les deux fonctions $g_k'(x)$ et $h_k'(x)$ sont positives sur I, les deux fonctions g_k et h_k sont croissantes. Dans le deuxième cas, les deux fonctions $g_k'(x)$ et $h_k'(x)$ sont négatives sur I, les deux fonctions g_k et h_k sont décroissantes. Quoi qu'il en soit, les deux fonctions g_k et h_k ont le même sens de variation, d'après le tableau du **8.a** la fonction f est k-forte.

9.b. Supposons que pour tout réel x de I : $|f'(x)| \leq k\dfrac{f(x)}{x}$. Alors pour tout réel x de I : $k\dfrac{f(x)}{x} \geq f'(x) \geq -k\dfrac{f(x)}{x}$. Les deux fonctions $g_k'(x)$ et $h_k'(x)$ sont de signes contraires, plus exactement g_k' est positive et h_k' est négative : la fonction g_k est croissante et la fonction k_k est décroissante. D'après le tableau du **8.a** la fonction f est k-faible.

9.c. On suppose que f est dérivable et il s'agit de démontrer que sa dérivée, si f est k-faible ou k-forte, vérifie l'une ou l'autre des inégalités en jeu.

Dans l'expression $F(f,k,x,y) = \left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\dfrac{f(y)}{y^k} - \dfrac{f(x)}{x^k}\right) = (g_k(y) - g_k(x))(h_k(y) - h_k(x))$,

fixons un réel x de I et posons $y = x + u$: $F(f,k,x,x+u) = (g_k(x+u) - g_k(x))(h_k(x+u) - h_k(x))$

Proposons-nous d'exploiter les meilleures approximations affines de g_k et de h_k au voisinage de x.

NB. Dans les différentes expressions, toute fonction notée « epsilon », quel que soit son indice, aura la propriété spécifique d'avoir pour limite 0 quand u tend vers 0.

Il en existe une telle que : $g_k(x+u) - g_k(x) = u.g_k'(x) + u.\varepsilon_1(u) = u.x^k\left(f'(x) + k\dfrac{f(x)}{x}\right) + u.\varepsilon_1(u)$

Il en existe une autre telle que : $h_k(x+u) - h_k(x) = u.h_k'(x) + u.\varepsilon_2(u) = u.\dfrac{1}{x^k}\left(f'(x) - k\dfrac{f(x)}{x}\right) + u.\varepsilon_2(u)$

En effectuant le produit de ces deux expressions, il en existe une troisième, qu'on ne prend pas la peine d'expliciter, telle que :

$(g_k(x+u)-g_k(x))\times(h_k(x+u)-h_k(x))=u^2.\left(f'(x)+k\dfrac{f(x)}{x}\right).\left(f'(x)-k\dfrac{f(x)}{x}\right)+u^2.\varepsilon_3(u)$, autrement dit telle que : $(g_k(x+u)-g_k(x))\times(h_k(x+u)-h_k(x))=u^2.\left((f'(x))^2-\left(k\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\right).+u^2.\varepsilon_3(u)$

Ainsi : $\dfrac{(g_k(x+u)-g_k(x))\times(h_k(x+u)-h_k(x))}{u^2}=.\left((f'(x))^2-\left(k\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\right).+.\varepsilon_3(u)$

- Si f est k-forte, cette expression est toujours positive, quel que soit x et u, y compris quand on fait tendre u vers zéro : $(f'(x))^2-\left(k\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\geq 0$ ou aussi bien $|f'(x)|\geq k\dfrac{f(x)}{x}$ quel que soit x de I.
- Si f est k-faible, cette expression est toujours négative, quel que soit x et u, y compris quand on fait tendre u vers zéro : $(f'(x))^2-\left(k\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\leq 0$ ou aussi bien $|f'(x)|\leq k\dfrac{f(x)}{x}$ quel que soit x de I.

Ce qui démontre les réciproques attendues.

Partie III : Une multitude de fonctions fortes et faibles

10. Si f est faible, il existe un entier k tel que f est k-faible. D'après la question **8.b**, la fonction g_k : $x\mapsto g_k(x)=x^k f(x)$ est strictement positive croissante et la fonction h_k : $x\mapsto h_k(x)=\dfrac{f(x)}{x^k}$ est strictement positive décroissante.

Leurs inverses varient en sens contraire : $x\mapsto H_k(x)=\dfrac{1}{g_k(x)}=\dfrac{1}{x^k}\times\dfrac{1}{f(x)}$ est strictement positive décroissante et $x\mapsto G_k(x)=\dfrac{1}{h_k(x)}=x^k\times\dfrac{1}{f(x)}$ est strictement positive croissante.

Nous obtenons à propos de la fonction $\dfrac{1}{f}$ un critère de faiblesse vu en **8.a**: elle est aussi k-faible.

NB. On pouvait aussi prendre en compte la condition nécessaire et suffisante de faiblesse vue à la question **6**.

Soit f une fonction faible sur un intervalle I. Il existe un entier $k\geq 1$ tel que pour tous réels x et y de I : $\dfrac{x^k}{y^k}+\dfrac{y^k}{x^k}\geq\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(y)}{f(x)}$.

Or : $\dfrac{f(x)}{f(y)}=\dfrac{\frac{1}{f(y)}}{\frac{1}{f(x)}}$; $\dfrac{f(y)}{f(x)}=\dfrac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(y)}}$ L'inégalité peut aussi bien s'écrire : $\dfrac{x^k}{y^k}+\dfrac{y^k}{x^k}\geq\dfrac{\frac{1}{f(y)}}{\frac{1}{f(x)}}+\dfrac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(y)}}$, ce qui démontre que si *f* est *k*-faible, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{f(x)}$ est elle aussi *k*-faible.

11. Supposons que *f* soit *k*-faible et que *g* soit *j*-faible.

Les fonctions $x\mapsto x^k f(x)$ et $x\mapsto x^j g(x)$ sont strictement positives croissantes donc leur produit $x\mapsto x^{k+j} f(x)\times g(x)$ est une fonction strictement positive croissante.

Les fonctions $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x^k}$ et $x\mapsto\dfrac{g(x)}{x^j}$ sont strictement positives décroissantes donc leur produit $x\mapsto\dfrac{1}{x^{k+j}}f(x)\times g(x)$ est une fonction strictement positive décroissante.

Le critère de $(k+j)$-faiblesse de la question **8.a** est vérifié par la fonction produit $f\times g$: il s'agit d'une fonction faible.

Dés lors que le produit de deux fonctions faibles est une fonction faible et que l'inverse d'une fonction faible est une fonction faible, le quotient de deux fonctions faibles est une fonction faible.

En ce qui concerne la somme, notons que si *f* est une fonction *k*-faible, alors elle est aussi *m*-faible pour tout entier *m* supérieur ou égal à *k*. En effet, si $m\geq k$, la croissance de la fonction $x\mapsto x^k f(x)$ implique celle de $x\mapsto x^{k+(m-k)} f(x)$et la décroissance de la fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x^k}$ implique celle de $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x^{k+(m-k)}}$.

On peut donc supposer que *f* et *g* sont toutes les deux *k*-faibles (quitte à ce que *k* désigne le plus grand des deux entiers *k* ou *j*). Alors : $x\mapsto x^k\left(f(x)+g(x)\right)$ est strictement positive et croissante car somme de deux fonctions strictement positives et croissantes et $x\mapsto\dfrac{f(x)+g(x)}{x^k}$ est strictement positive et décroissante car somme de deux fonctions strictement positives et décroissantes. On conclut toujours à l'aide du critère de la question **8.a.**

12. Considérons par exemple la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x$ et la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$

La fonction dérivée de f est la fonction : $f'(x) = 1$ tandis que : $\frac{f(x)}{x} = 1$. Ainsi, pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $|f'(x)| \geq \frac{f(x)}{x}$. Cette fonction f est 1-forte en vertu de la question **9.a**.

La fonction dérivée de g est la fonction : $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ tandis que : $\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{x^2}$. Ainsi, pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $|g'(x)| \geq \frac{g(x)}{x}$. Cette fonction g est 1-forte en vertu de la question **9.a**.

Cependant : $(f+g)(x) = x + \frac{1}{x}$ et $(f+g)'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. La fonction dérivée s'annule en 1 ce qui fait qu'aucune inégalité de la forme $|(f+g)'(x)| \geq k\frac{f(x)+g(x)}{x}$ ne peut être satisfaite en ce point : la fonction somme ne peut pas être k-forte, pour aucune valeur de k.

De façon analogue, $(f \times g)(x) = 1$. c'est une fonction constante, de dérivée nulle. D'après **9.c**, cette fonction ne peut pas être forte.

13. Puisque g est définie sur $]0, +\infty[$ et que f, définie sur I, est à valeurs strictement positives, la composée $g \circ f$ existe et est définie sur I.

Nous proposons une résolution dans le cas où f et g sont des fonctions continument dérivables, laissant au lecteur opiniâtre le soin de s'attaquer au cas général. Dans ce cas en effet, la fonction composée est continûment dérivable et sa fonction dérivée est la sympathique fonction : $x \mapsto g'(f(x)) \times f'(x)$.

13.a. Supposons que g soit j-forte et que f soit k-forte. Alors pour tout réel x de I :

$|g'(f(x))| \geq j\frac{g(f(x))}{f(x)}$ et $|f'(x)| \geq k\frac{f(x)}{x}$. On peut multiplier membre à membre ces deux inégalités de même sens entre nombres strictement positifs :

$$|g'(f(x)) \times f'(x)| = |g'(f(x))| \times |f'(x)| \geq \left(j\frac{g(f(x))}{f(x)}\right) \times \left(k\frac{f(x)}{x}\right) \text{ soit :}$$

$|g'(f(x)) \times f'(x)| \geq j \times k \times \frac{g(f(x))}{x}$ autrement dit : $|(g \circ f)'(x)| \geq j \times k \times \frac{g \circ f(x)}{x}$. D'après **9.c**, la fonction composée est une fonction $k \times j$ -forte.

13.b. De même, si g est j-faible et f est k-faible, $|g'(f(x))| \leq j\dfrac{g(f(x))}{f(x)}$ et $|f'(x)| \leq k\dfrac{f(x)}{x}$. On peut multiplier membre ces deux inégalités de même sens entre nombres strictement positifs :

$|g'(f(x)) \times f'(x)| = |g'(f(x))| \times |f'(x)| \leq \left(j\dfrac{g(f(x))}{f(x)}\right) \times \left(k\dfrac{f(x)}{x}\right)$ soit :

$|g'(f(x)) \times f'(x)| \leq j \times k \times \dfrac{g(f(x))}{x}$ autrement dit : $|(g \circ f)'(x)| \leq j \times k \times \dfrac{g \circ f(x)}{x}$. D'après **9.c**, la fonction composée est une fonction $k \times j$ -faible.

Partie IV : Application à la démonstration d'inégalités

14. Soit n un entier naturel non nul.

Fixons un nombre réel strictement positif c et considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x+c)^n$.

Sa fonction dérivée est la fonction définie par : $f'(x) = n(x+c)^{n-1}$ qui est une fonction strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qui vérifie la relation : $f'(x) = n\dfrac{f(x)}{x+c}$.

Puisque c est strictement positif et que $\dfrac{1}{x+c} < \dfrac{1}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$, cette fonction vérifie l'inégalité : $|f'(x)| = f'(x) \leq n\dfrac{f(x)}{x}$. En vertu de la question **9.b**, la fonction f est une fonction n-faible.

En conséquence, pour tous réels x et y appartenant à $]0, +\infty[$: $\dfrac{x^n}{y^n} + \dfrac{y^n}{x^n} \geq \dfrac{f(x)}{f(y)} + \dfrac{f(y)}{f(x)}$, c'est-à-dire : $\dfrac{x^n}{y^n} + \dfrac{y^n}{x^n} \geq \dfrac{(x+c)^n}{(y+c)^n} + \dfrac{(y+c)^n}{(x+c)^n}$, ce qui n'est autre que l'inégalité à démontrer en notant $x = a$; $y = b$.

15. La fonction sinus a pour dérivée la fonction cosinus, fonction strictement positive sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Proposons-nous de comparer sa fonction dérivée $\cos x$ avec le quotient $\dfrac{\sin x}{x}$ et pour cela, considérons, sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (rien n'empêchera plus de fermer l'intervalle), la fonction w définie par : $w(x) = \sin x - x\cos x$

La fonction w prend la valeur 0 en 0, la valeur 1 en $\frac{\pi}{2}$ et a pour dérivée la fonction : $w'(x) = x.\sin x$ qui est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction w est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à partir de la valeur 0 : elle est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ne s'annulant qu'en 0. En conséquence, l'expression $\frac{\sin x}{x} - \cos x = \frac{w(x)}{x}$ est strictement positive sur l'intervalle ouvert $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi, pour tout réel x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\cos x = |(\sin x)'| \le \frac{\sin x}{x}$, ce qui signifie d'après la question **9.a** que la fonction sinus est 1-faible. En foi de quoi, pour tous réels a et b de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge \frac{\sin a}{\sin b} + \frac{\sin b}{\sin a}$.

La fonction tangente a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$, fonction strictement positive sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Proposons-nous de comparer sa fonction dérivée $\frac{1}{\cos^2 x}$ avec le quotient $\frac{\tan x}{x}$ et pour cela, remarquons que : $\frac{\tan x}{x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{x\cos^2 x}(\sin x \cos x - x)$. Considérons alors, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (rien n'empêchera plus de fermer l'intervalle), la fonction v définie par : $v(x) = \sin x \cos x - x$

Cette fonction v prend la valeur zéro en 0, la valeur $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, et a pour dérivée la fonction : $v'(x) = 2\cos^2 x - 2$, fonction négative. La fonction v est décroissante à partir de la valeur 0. Il s'agit d'une fonction négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que $\frac{1}{\cos^2 x} = |(\tan x)'| \ge \frac{\sin x}{x}$, ce qui signifie d'après la question **9.a** que la fonction tangente est 1-forte sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En foi de quoi, pour tous réels a et b de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \le \frac{\tan a}{\tan b} + \frac{\tan b}{\tan a}$.

Ce qui achève la démonstration (et le problème).